29/09/2019

Διάλεξη 1η

Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Αντικείμενο: Μελέτη συναρτήσεων από το σύνολο των μιγαδικών αριθμών σε αυτό, από αναλυτική άποψη (δηλαδή συνέχεια και κυρίως μιγαδική διαφορισιμότητα)

Βιβλιογραφία: • Μερκουράκης, Χατζηαφράτης, Εισαγωγή στην Μιγαδική Ανάλυση 2005 (λίγες ασκήσεις + πλαίσια θεωρία και μέτρια δομή)

• Κοββαρίτης: (εφαρμοσμένη μιγαδική ανάλυση)
" επαρκής θεωρία + πολλές ασκήσεις.

• Καρακώστας: Εισαγωγή στην μιγαδική ανάλυση. (περιέχει την αναγκαία θεωρία, τονίζω τις ιδιότητες Μιγαδικής Ανάλυσης)

* Υπάρχουν (ατελείς) στην σελίδα του διδάσκοντα. (Θα εμπλουτιστούν ως προς μέρη της θεωρίας που λείπουν. Σκοπός να περιέχουν όλη την θεωρία με αποδείξεις ή παραπομπές. Σύνδεση ως προς τοπολογία και συνέχεια, και διαφορισιμότητα με σημειώσεις «Απειροστικής Ανάλυσης» (ΑπΙΙΙ + ΙΙ) περιέχουν κάποιες - όχι πολλές - ασκήσεις)

Κεφάλαιο 1ο: Μιγαδικοί Αριθμοί:

Προαπαιτούμενα: Προφανώς όχι τα πάντα από το αντίστοιχο μάθημα. Να γνωρίζω: • το σώμα των πραγματικών (το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$).

• Ιδιότητες πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (π.χ. εκθετική, λογαριθμική και τριγωνομετρική)

• Διαφορισιμότητα διανυσματικών πεδίων από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός: (*) Το κίνητρο για να ξεκινήσει η μελέτη ήταν ότι η εξίσωση $\boxed{x^2+1=0}$ δεν μπορεί να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$. Για την επίλυση της απαιτείται ένας αριθμός ο οποίος θα συμβολίζεται i, με την ιδιότητα $i^2=-1$.
Η ελάχιστη (και μέχρι ισομορφισμού μοναδική) επέκταση του σώματος $(\mathbb{R},+,\cdot)$ των πραγματικών σε ένα σώμα που θα περιέχει ένα i με την ιδιότητα $i^2=-1$ α
Είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 2, πάνω από το $\mathbb{R}$, με διατεταγμένη βάση που θα αντιστοιχούν στην πραγματική μονάδα $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ και την φανταστική μονάδα $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Αυτή την ελάχιστη επέκταση την ονομάζουμε σώμα μιγαδικών αριθμών. και την συμβολίζουμε: $\boxed{(\mathbb{C},+,\cdot)}$

Συνεπώς: 1) Αντιστοιχούμε 1-1 και επί την μεταθετική ομάδα $(\mathbb{C},+)$ με την $(\mathbb{R}^2,+)$ όπου: (α) ουδέτερο στοιχείο είναι το $0\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ αντιστοιχεί στο $(0,0)\in\mathbb{R}^2$.

(β) Η πραγματική μονάδα $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ αντιστοιχεί στο $(1,0)\in\mathbb{R}^2$

(γ) Η φανταστική μονάδα $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο $(0,0)\in\mathbb{R}^2$.

και γενικότερα, (δ) κάθε πραγμ. αριθμός $x\in\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο $(x,0)\in\mathbb{R}^2$ και (ε) κάθε μιγαδικός αριθμός $z\in\mathbb{C}$ αντιστοιχεί, μοναδικά σε ένα διάνυσμα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, μέσω της αλγεβρικής παράστασης (ή καρτεσιανής):

$$\underset{\in\mathbb{C}}{z} = \underset{\in\mathbb{R}}{x} + \underset{\in\mathbb{R}}{y}i = x(1,0) + y(0,1) = (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Από εδώ και κάτω όταν θα γράφουμε $z = x+yi = x+iy$ θα εννοούμε (εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό) ότι $x, y \in \mathbb{R}$

(6c) Η πρόσθεση $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ορίζεται μέσω της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 = x_1+y_1 i = (x_1, y_1)$ και $z_2 = x_2+y_2 i = (x_2, y_2)$

έχουμε $z_1+z_2 = (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$$= (x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$$

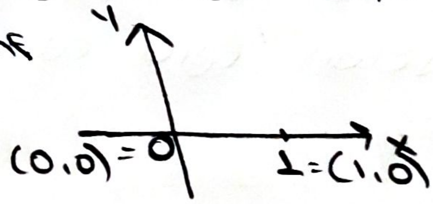
$$= (x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i)$$

<u>π.χ.</u>

$$(3+2i)+(5+3i) = 8+5i$$

<u>Παρατήρηση</u>: Το σύνολο $\mathbb{C}$ είναι μεταθετική ομάδα ως προς την πρόσθεση, δηλαδή ισχύουν οι ιδιότητες, προσεταιρ., μεταθ., ∃ ουδέτερο, ∃ αντίθετο, τις οποίες κληρονομεί μέσω των αντίστοιχων ιδιοτήτων του $\mathbb{R}^2$.

▸ Ειδικότερα, ότι το $0 = 0+0i = (0,0)$ είναι το ουδ. στοιχείο της πρόσθεσης



Προκύπτει ως $\underset{x+yi}{z} + \underset{0+0i}{0} = (x,y)+(0,0) = (x,y) = z$

και αφού $z+(-z)=0 \Leftrightarrow (x,y)+(-(x,y)) = (x,y)+(-x,-y)$

$$= (0,0)$$

βλέπω ότι ο αντίθετος του $z = x+yi$ είναι ο $-z = (-x)+(-y)i$.

(*) Η πρόσθεση στο $\mathbb{C}$ επεκτείνει την πρόσθεση στο $\mathbb{R}$.

αφού $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: $x_1+x_2 = (x_1+0i)+(x_2+0i)$

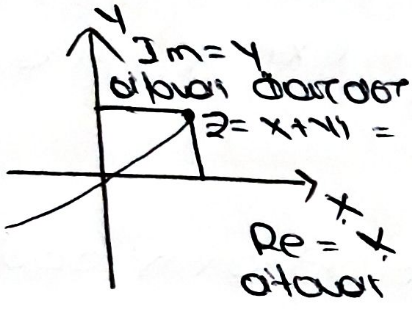
$$= (x_1+x_2)+0i$$

$$= x_1+x_2$$

▶ Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ισοδύ
$= (x, y)$

Είναι το άθροισμα ενός πραγματικού αριθμού $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (x,0) \in \mathbb{R}^2$ και ενός φανταστικού $yi = y(0,1) = (0,y)$

Δηλ. $\underbrace{\text{μιγαδικός}}_{\in Oxy \text{ επίπεδο}} = \underbrace{\text{πραγματικός}}_{\in \text{ άξονα } x} + \underbrace{\text{φανταστικός}}_{\in \text{ άξονα των } y}$



$z = x + yi = (x;y) =: Re(z) + Im(z)\cdot i$

Προσοχή: $Im(z), Re(z) \in \mathbb{R}$.

Μιγαδικό επίπεδο //.
Για τον λόγο αυτό το $\mathbb{C}$ λέμε ότι ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^2$ το οποίο ονομάζεται (για το $\mathbb{C}$) και ως μιγαδικό επίπεδο //.

~o~o~o~o

▶ Αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό (ως εσωτερική πράξη) $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, αυτός προκύπτει από την απαίτηση να μπορούμε να κάνουμε στο $\mathbb{C}$ πράξεις «όπως στο $\mathbb{R}$» (δηλ. πράξεις συνήθως), με την πρόσθ. και τον $\cdot$, οι οποίες πράξεις δεν περιέχουν το i και μάλιστα να ισχύει $i^2 = i \cdot i = -1$.

↳ Πράγματι για $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$
έχουμε $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1(x_2 + y_2 i) + y_1 i (x_2 + y_2 i)$

$= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i$

$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$

ρα με το κίνητρο αυτό ορίζουμε το $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ως

$$\underset{(x_1,y_1)}{(x_1+y_1 i)}\underset{(x_2,y_2)}{(x_2+y_2 i)} = \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)}_{(x_1x_2 - y_1y_2\,,\; x_1y_2 + x_2y_1)}$$

Παρατήρηση: Πάνω σε αυτή τη δομή του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών στηρίζεται η διαφορά μεταξύ της μιγαδικής παραγώγου και της παραγώγου διανυσματικού πεδίου διάστασης 2.

Άσκηση: Ελέγξτε ότι ο μιγαδ. πολλ/σμός επεκτείνει τον πολ/μό στο $\mathbb{R}$, ότι ο βαθ. πολλ/μός στον $\mathbb{R}^2$ είναι ειδική περίπτωση πολ/μού πραγμ. επί μιγαδικών και τέλος ότι με αυτόν τον πολ/μό και ουδέτερο στοιχείο το $1=(1,0)$. Ο πολ/σμός αυτός έχει στο $\mathbb{C}^*$ τις ιδιότητες μεταθ. ομάδας και ισχύουν οι επιμεριστικές ιδιότητες.